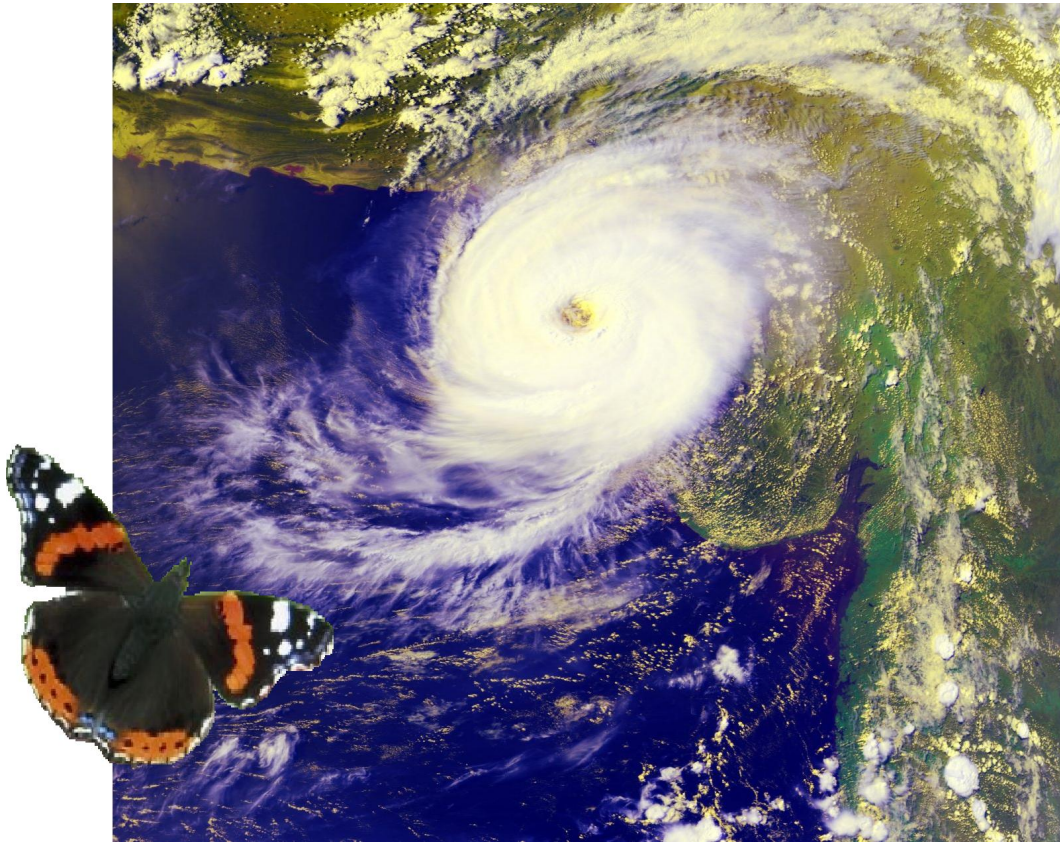


DOSSIER

L'Effet Papillon

Pierre Bojarski,
Pierre-Antoine Curet,
Jean-François Rupprecht,
Jean-Benoît Saint-Pierre

1^{de}S1 - Lycée Hoche



*Le battement d'aile d'un papillon au Brésil
peut-il déclencher une tornade au Texas ?*

Historique de la découverte de l'“Effet Papillon”

Le principe de l'effet papillon remonte au *XVIII*^{ème} siècle.
Il est posé par philosophe de d'Holbach.

La théorie de d'Holbach, est reprise par Poincaré
au début du *XX*^{ème} siècle,

Elle est mise en évidence mathématiquement par Lorenz en
1963 :

“One meteorologist remarked that if the theory were correct, one flap of a seagull's wings would be enough to alter the course of the weather forever.”

Paul Henri Thiry, baron d'Holbach



Philosophe français d'origine allemande naît en 1723 et meurt en 1789.

Le “Maître d’hôtel de la philosophie”. Son ouvrage essentiel est *le Système de la Nature* , publié en 1770.

*“La matière agit par ses propres forces et n’a
besoin d’aucunes forces extérieures pour être
mise en mouvement”*

Baron d’Holbach

La théorie de l'effet papillon

“Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l’univers à l’instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, alors même que les lois naturelles n’auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu’approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c’est tout ce qu’il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu’il est régi par des lois ;

mais il n’en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers.

La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. [...] Enfin, si tout est lié dans la nature, si tous les mouvements y naissent les uns des autres quoique leurs communications secrètes échappent souvent à notre vue, nous devons être assurés qu'il n'est point de cause si petite ou si éloignée qui ne produise quelquefois les effets les plus grands et les plus immédiats sur nous-mêmes.

*C'est peut-être dans les plaines arides de la Libye
que s'amassent les premiers éléments d'un orage qui,
portés par les vents,
viendra vers nous, appesantira notre atmosphère, influera sur
le tempérament et les passions d'un homme que ses
circonstances mettent à la portée d'influer sur beaucoup
d'autres,
et qui décidera, d'après ses volontés, du sort de plusieurs
nations".*

Henri Poincaré



Mathématicien français, Henri Poincaré naît en 1854 et meurt en 1912.

Polytechnicien, ingénieur des Mines, docteur ès sciences mathématiques et philosophe (*La Science et l'Hypothèse*, 1902), il est élu à l'Académie des sciences en 1887.

“Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de mal à prévoir le temps avec quelque certitude ? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles-mêmes nous semblent-elles arriver au hasard, de telle sorte que bien des gens trouvent tout naturel de prier pour voir la pluie ou le beau temps, alors qu’ils trouveraient ridicule de demander une éclipse par une prière ? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent en général dans des régions où l’atmosphère est en équilibre instable.

Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu’un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d’état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là ; et il étend ses ravages sur des contrées qu’il aurait épargnées. Si l’on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d’avance, mais les observations n’étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c’est pour cela que tout semble dû à l’intervention du hasard.

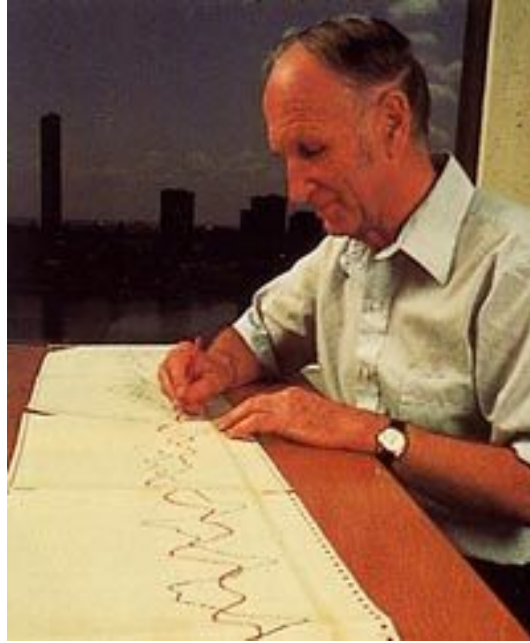
Ici encore, nous retrouvons le même contraste entre cause minime, inappréciable pour l’observateur, et des effets considérables qui sont quelquefois d’épouvantables désastres”.

Edward N. Lorenz



Météorologue et physicien américain né en 1917 a été professeur au M.I.T.

L'erreur qui lui valut la renommée



En 1972, lors d'une conférence consacrée au "Programme de Recherche Global sur l'Atmosphère", Lorenz intitule son discours :

"Predictability : Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas ?".

Le concept de l'effet papillon, né avec d'Holbach, est maintenant défendu scientifiquement.

Mais la communauté scientifique restera longtemps sceptique. On lit ainsi dans un article paru dans CNRS Info :

“la belle image du battement d'ailes de papillon induisant une tornade de l'autre côté de la planète est inexacte, car il existe aussi une dissipation de l'erreur”.

La perturbation provoquée par le papillon serait donc compensée par la suite. D'autant plus que, comme le souligne un des pionniers du chaos, David Ruelle,

“les papillons volent en air calme, et sont à ce titre peu susceptibles de voir leurs perturbations suffisamment amplifiées pour générer des cyclones”.

Les systèmes dynamiques

Un peu d'histoire des équations différentielles

Isaac NEWTON naît en Angleterre en 1642 et meurt en 1727. Il étudie au Trinity College de Cambridge.

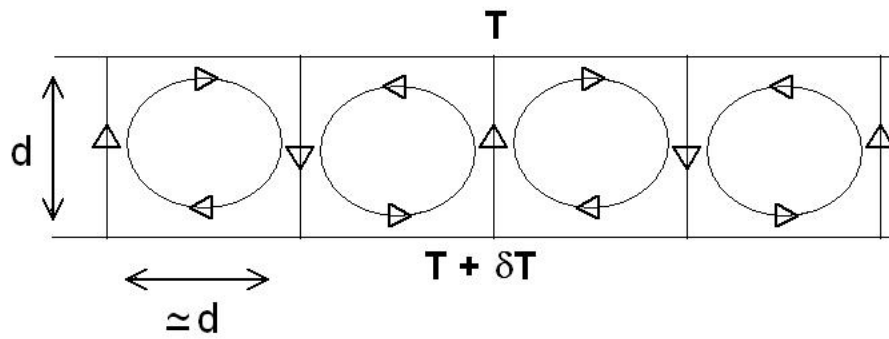
Gottfried Wilhelm Leibniz naît en Allemagne 1646 et meurt en 1716. Philosophe, savant, juriste et diplomate à l'époque de Louis XIV, il fonde en 1700 l'Académie des sciences de Berlin.

Leonhard EULER naît en Suisse en 1707 et meurt aveugle en 1783.

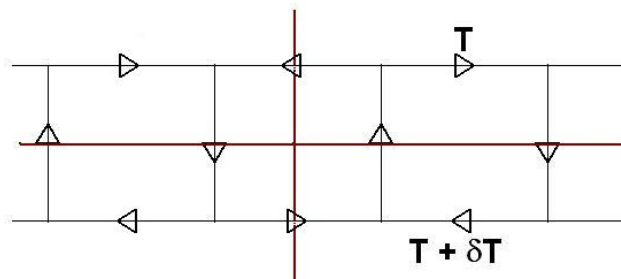
Laplace, Lagrange et Gauss développent les méthodes de la théorie des perturbations qui permettent par exemple de déterminer les perturbations séculaires des orbites des planètes.

Joseph Liouville naît en 1809 et meurt en 1882. Il montre l'impossibilité de résoudre certaines équations différentielles même d'ordre peu élevé.

Le Modèle de convection de Lorenz



Modèle initial en rouleaux comprenant douze équations.

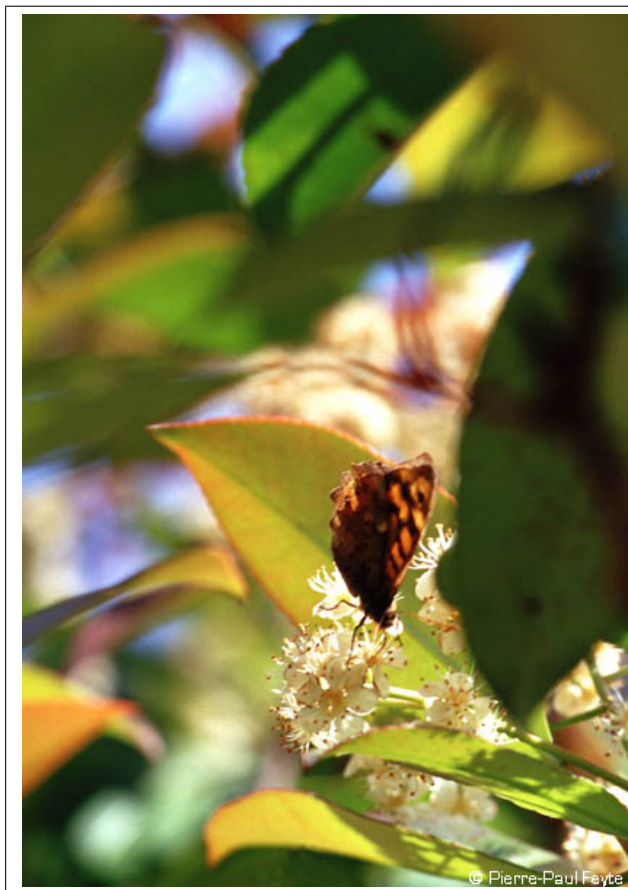


Modèle simplifié comprenant trois équations.

Les variables retenues par Lorenz sont

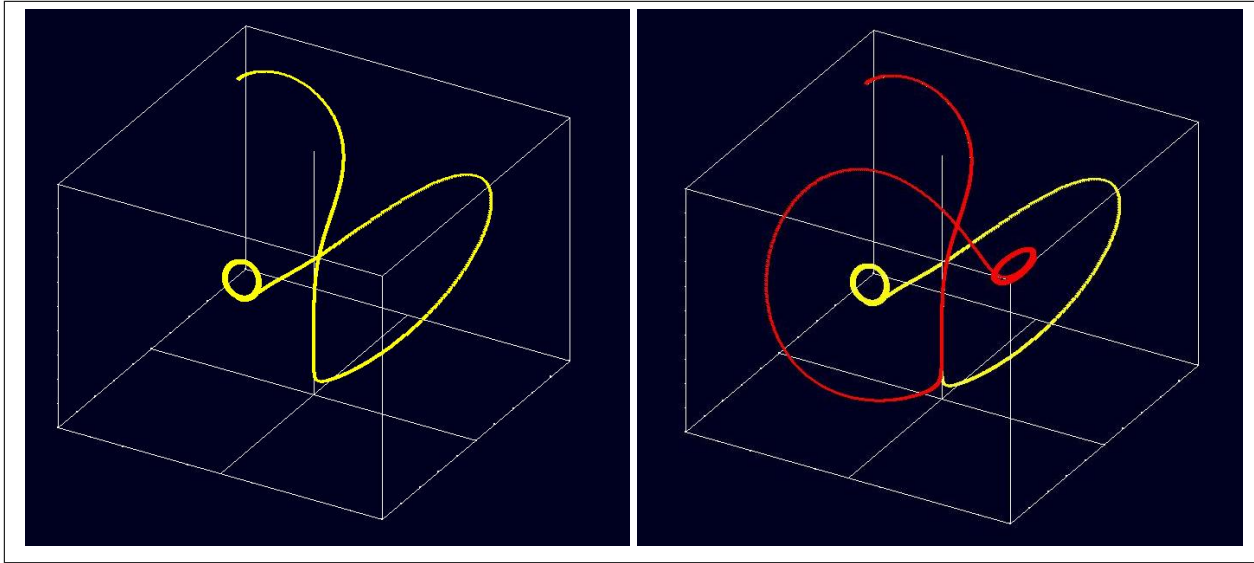
- x , le temps,
- y_1 , l'intensité du mouvement de convection,
- y_2 , la différence de température entre la couche haute et la couche basse
- y_3 , la distorsion du profil de variation de la température.

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= \sigma y_2(x) - \sigma y_1(x) \\y_2'(x) &= \mathbf{r} y_1(x) - y_2(x) - y_1(x)y_3(x) \\y_3'(x) &= y_1(x)y_2(x) - by_3(x)\end{aligned}$$



Le vol du “Papillon” de Lorenz et sa trajectoire.

L'“erreur” qui apporta le succès



Première trajectoire (en jaune) :

$$y^0 = (-4.73, -16.15, 76.132200675\mathbf{3}).$$

Seconde trajectoire (en rouge) :

$$y^0 = (-4.73, -16.15, 76.132200675\mathbf{4}) :$$

la position initiale est modifiée d'une quantité de l'ordre 10^{-10} .

(Ce ne sont pas bien sûr les valeurs prises par Lorenz !)

A la suite de cette observation, Lorenz donna une première définition de la notion de chaos :

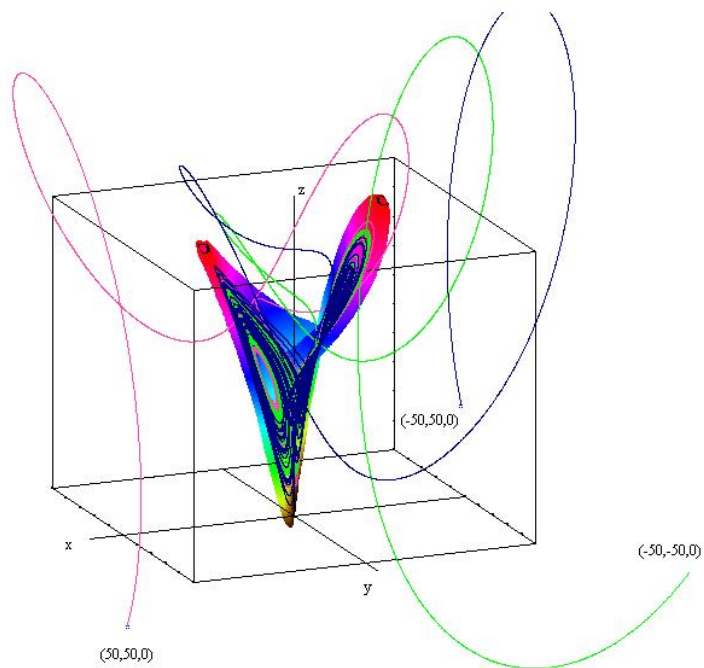
“Si, après quelques itérations, l’erreur est aussi importante que la valeur calculée, le système est non seulement sensible, il est de plus chaotique.”

Qu’est-ce qu’un attracteur chaotique

Un attracteur chaotique est un ensemble de points qui ont des propriétés très particulières :

- c’est d’abord un attracteur,
- il est chaotique.

Remarque : la structure d’un attracteur chaotique peut être fractale.



Courbes qui convergent vers l’“attracteur chaotique” de Lorenz.

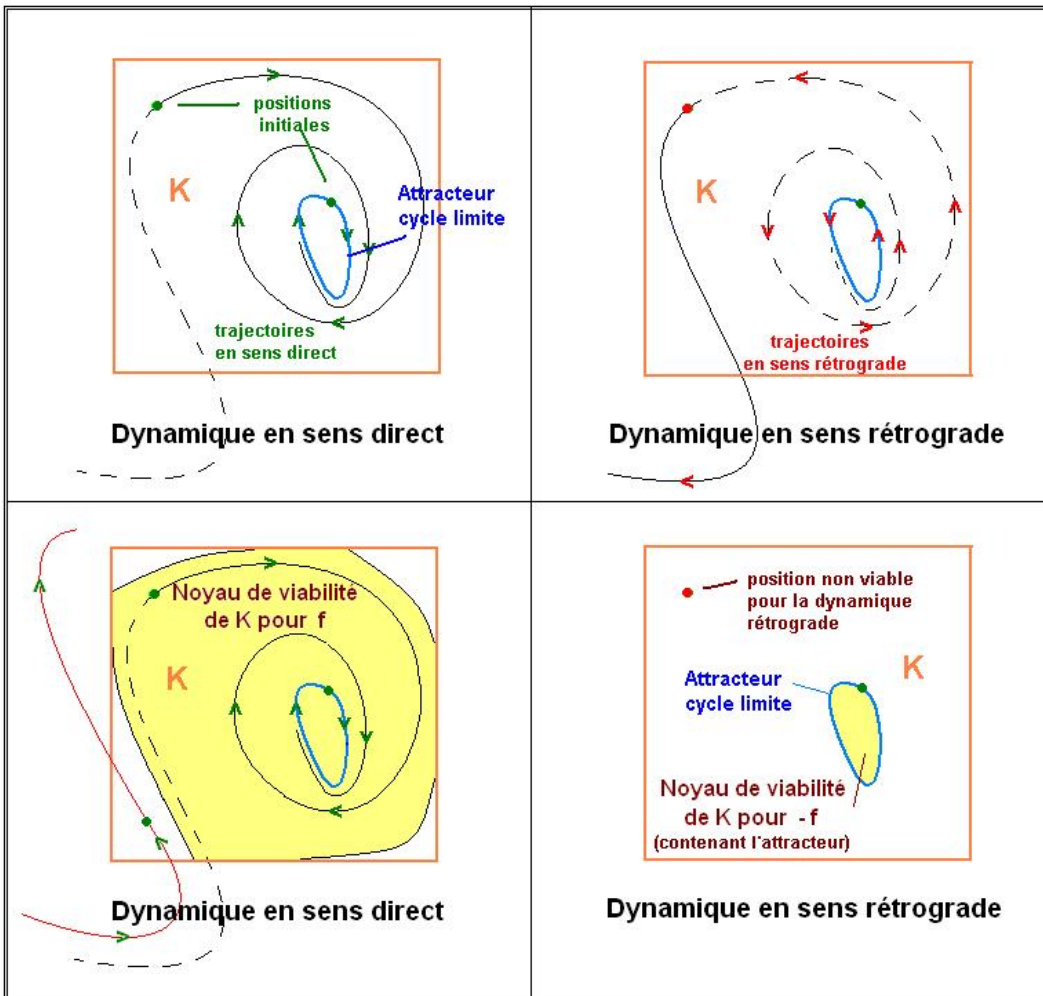
Qu'est-ce que le noyau de viabilité

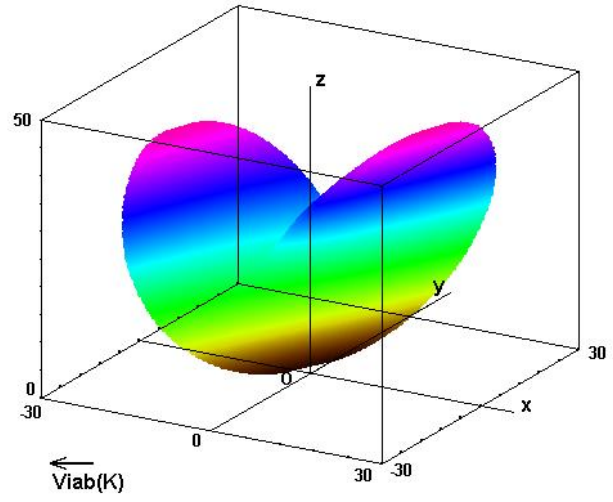
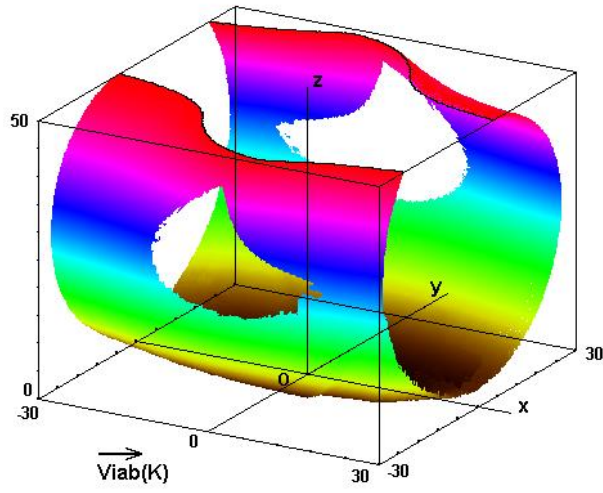
Le Noyau de viabilité de K pour la dynamique f est précisément

l'ensemble des positions initiales dans K à partir desquelles les trajectoires resteront indéfiniment dans K .

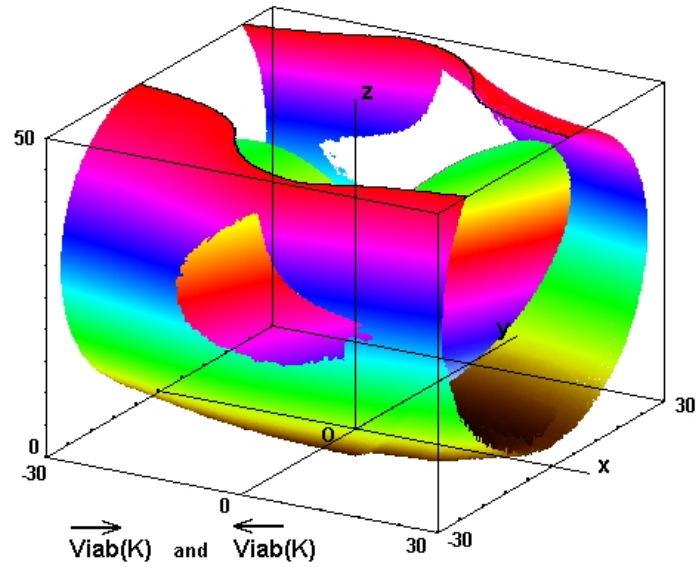
La notion et la caractérisation mathématique du noyau de viabilité sont récentes. Elles remontent aux années 1986 et sont dues à Jean-Pierre Aubin, Professeur à Paris Dauphine et ancien élève du Lycée Hoche.

Principe d'extraction de l'attracteur par le noyau de viabilité.

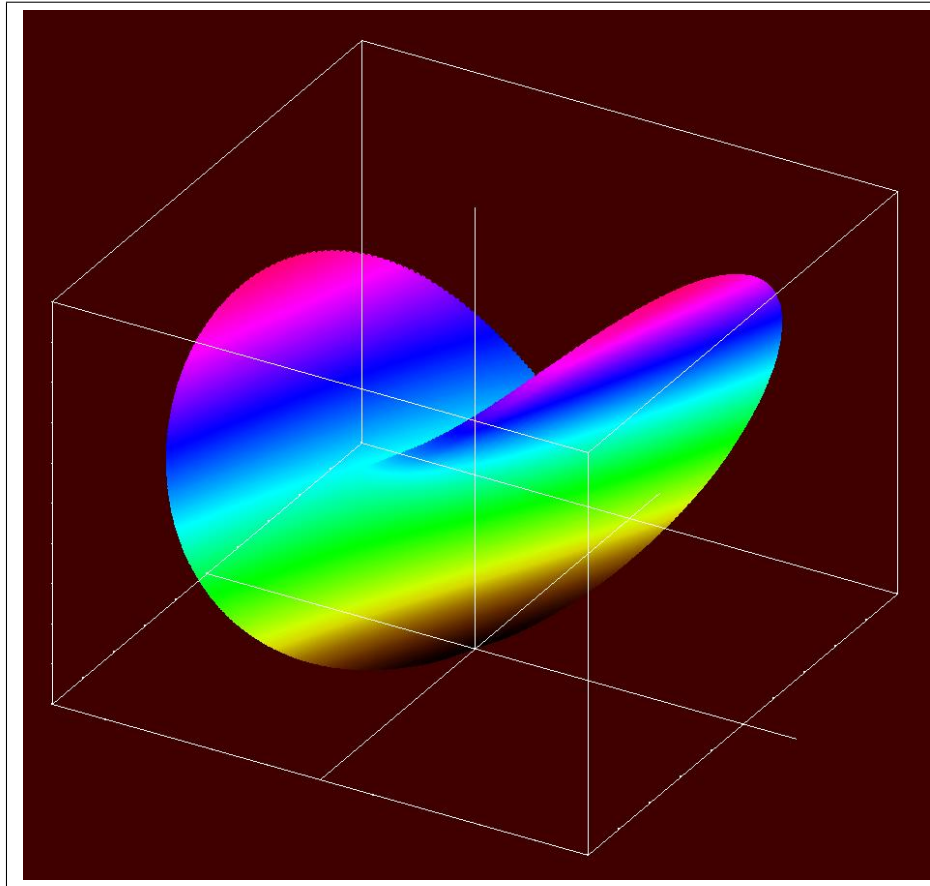




Les deux Noyaux de viabilité antérograde (à gauche) et rétrograde (à droite).



Le Noyau de viabilité rétrograde inclus dans le noyau de viabilité antérograde.



**Le Noyau de viabilité en sens rétrograde du modèle de Lorenz.
Il contient l'“attracteur” de Lorenz et les équilibres instables.**

Les positions d'équilibre

$$e_1 := (0, 0, 0)$$

$$e_2 := \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right)$$

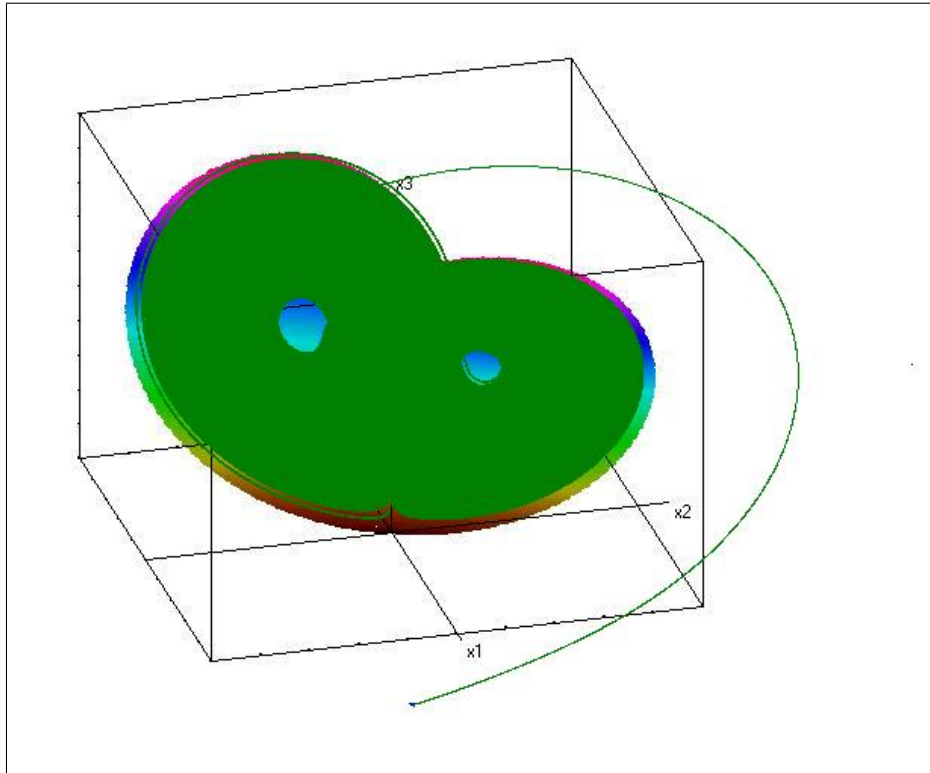
et

$$e_3 := \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right)$$

Ce sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= 0 \\ ry_1 - y_2 - y_1y_3 &= 0 \\ y_1y_2 - by_3 &= 0 \end{aligned} \tag{0.1}$$

Remarque : en général les coordonnées des deux équilibres e_2 et e_3 ont des valeurs non rationnelles et sont donc inaccessibles à l'aide d'un ordinateur.



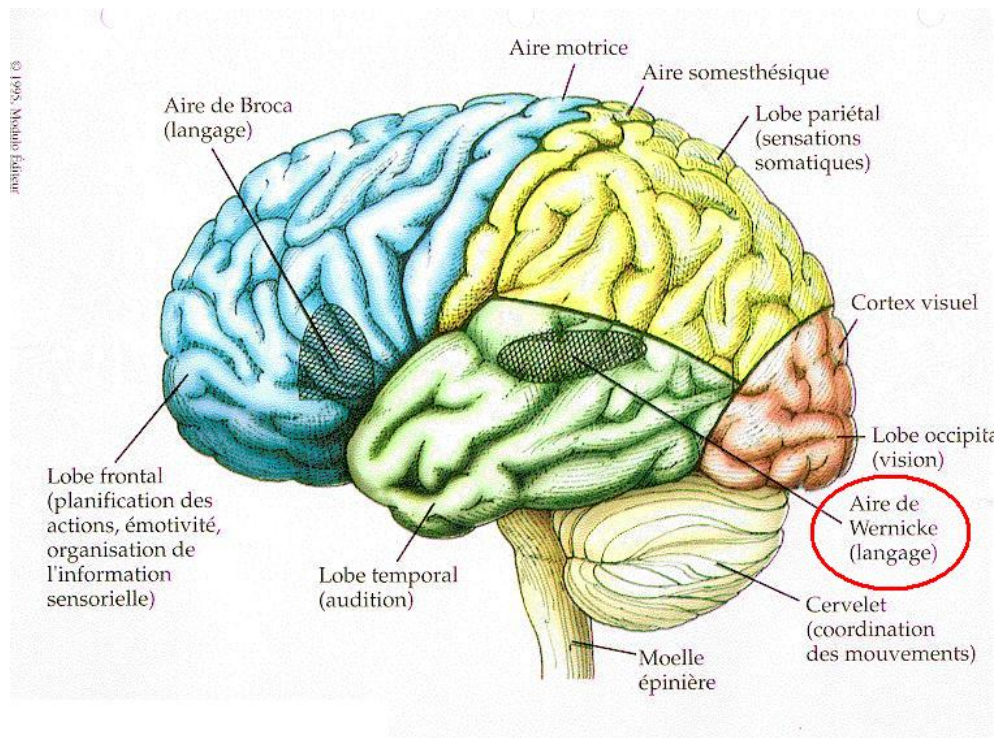
Des exemples dans les sciences, l'histoire...

Le principe de l'“Effet Papillon” dans les sciences

Les hasards heureux de certaines découvertes

Les cancers : une origine à l'échelle du phénotype moléculaire,
un résultat à l'échelle du phénotype clinique

Un sillon de plus dans le cortex et...



... le singe devient homme !

La rupture d'un équilibre instable : les chevaux de Ladoga

<< Malaparte raconte la mort dramatique d'un millier de chevaux russes dans les glaces du lac Ladoga, pendant l'hiver 1942. Pour échapper à un feu de forêt provoqué par les bombardements aériens, les chevaux se précipitent dans le lac. Malgré la vague de froid récemment arrivée, l'eau est encore liquide. Pendant que les chevaux, la tête tendue hors de l'eau, nagent vers l'autre rive, il se fait un grand bruit. L'eau gèle subitement, enfermant les bêtes dans une gangue de glace.

Le lendemain, le soleil illumine les crinières rigides, couvertes de glaçons transparents. Immobilisée, chaque tête est une sculpture, dont en d'autres circonstances, on eut admiré la beauté. Que s'est-il passé ? >>

L'“Effet Papillon” dans l'Histoire

Quelques anecdotes historiques :

Dom Pérignon et le Champagne



La légende de la tarte TATIN



Une histoire faite par les Hommes ...



Le chaos, ou l'origine du monde gravé par Picart