Viabilité d'une dynamique économique : le cas des opérateurs de production multi-affines

GREQUAM
17 juin 2002

Jean-Pierre Aubin, Paul Bourgine & Rolando Guzzi

CREA (Centre de Recherches en Épistémologie Appliquée)
École Polytechnique

Résumé

On considère une économie évolutionnaire où les agents économiques sont engagés dans une dynamique autonome de consommation et de production. Les agents se regroupent en firmes auxquelles ils apportent leurs ressources pour produire les produits finaux qu'ils consomment. L'économie dans son ensemble doit rester durablement dans le domaine de viabilité défini par les contraintes de consommation, de production et d'adéquation de l'offre et de la demande. Il n'y a aucune raison a priori pour que les dynamiques autonomes des agents maintiennent le système économique au sein de son domaine de viabilité. Nous utilisons les multiplicateurs de viabilité associés aux contraintes pour modifier les dynamiques de façon à garantir la viabilité.

Résumé 2

On étudie l'évolution des opérateurs de production dans le cas particulier où ils se présentent sous une forme multi-affine (somme d'opérateurs multi-linéaires): la correction des dynamiques des opérateurs de production se présente alors à chaque instant sous la forme particulièrement simple du produit tensoriel des facteurs de production et du multiplicateur de viabilité ; cette correction s'interprète comme une règle "multi-hebbienne", généralisant au cas multilinéaire la règle d'apprentissage des réseaux neuronaux proposée en 1949 par Hebb. Un intérêt majeur du modèle est de fournir la manière dont le réseau des processus de production évolue tout en respectant à chaque instant ces contraintes.

Plan

1. La métaphore mathématique
2. Évolution des techniques de production
3. Opérateurs de production multi-affines
4. Exemple: travail comme unique ressource
5. Régulation des évolutions viables

Agents économiques

Nous introduisons :

1. un ensemble $\{1, \ldots, \mathbb{I}\}$ d'agents économiques
   (a) consommant des biens $x_i \in X$ dans un espace de biens $X := \mathbb{R}^l$
   (b) mettant des ressources $y_i^k \in Y_i := \mathbb{R}^{m_i}$
2. à la disposition d'un ensemble $\{1, \ldots, \mathbb{K}\}$ de firmes décrites par des ensembles $S_k \subset \{1, \ldots, \mathbb{I}\}$ d'agents économiques employés par la firme k.

Les états économiques

On pose

$$y^k := \{y_i^k\}_{i \in S_k} \in Y^k := Y^{S_k} := \prod_{i \in S_k} Y_i$$

L'état

$$(x_i, (y_i^k)_{k=1,\ldots,\mathbb{K}})$$

d'un agent économique $i = 1, \ldots, \mathbb{I}$ est donc constitué de sa consommation $x_i \in X$ et des ressources $(y_i^k)_{k=1,\ldots,\mathbb{K}}$ qu'il met à la disposition des $\mathbb{K}$ entreprises.

Opérateur de production

On décrit les processus de production des entreprises $k \in \mathbb{K}$

1. par des applications non-linéaires input-output
$$g_k : Y^{S_k} \mapsto X$$
associant un bien $x \in X$ à toute ressource $y^k \in Y^{S_k}$ mise à la disposition de la firme k par chaque agent économique,

2. pour chaque agent $i = 1, \ldots, \mathbb{I}$, par une correspondances
$$L_i : X \rightsquigarrow Y_i$$
associant à chaque bien consommé $x_i \in X$ l'ensemble des ressources qu'il peut mettre à la disposition des firmes qui l'emploient.

Adéquation de l’offre et de la demande

À chaque instant, biens produits et consommés (outputs) et ressources (inputs) des agents économiques doivent satisfaire des contraintes de viabilité exprimant l’adéquation de l’offre à la demande :

- d’une part, la consommation totale ne peut excéder la prodution totale et
- d’autre part, les ressources mises à la dispostion des firmes par chaque agent ne peut excéder une certaine limite.

Contraintes de viabilité

Pour simplifier, nous ne retiendrons dans cette étude que ces deux types de contraintes de rareté, qui sont alors décrites à chaque instant $t \geq 0$ par

$$\begin{cases} i) \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathbb{I}} x_i(t) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\mathbb{K}} g^k(y^k(t)) \\ \\ ii) \ \forall i \in \mathbb{I}, \quad \displaystyle\sum_{\{k \mid S_k \ni i\}} y_i^k(t) \ \in \ L_i(x_i(t)) \end{cases}$$

Dynamiques initiales sans contraintes

On part de dynamiques initiales décrivant le comportement dynamique des agents économiques en l'absence de contraintes de rareté (cette hypothèse est l'équivalent dynamique de celle classique décrivant le comportement (statique) d'un agent économique par sa fonction d'utilité ou par sa fonction de demande walrasienne).

Le système d'éaquations différentielles

Par exemple, dans le cas le plus simple, ce comportement sera décrit par des applications $c_i : X \mapsto X$ et $d_i^k : Y_i \mapsto Y_i$ régissant l'évolution des consommations et des ressources par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} i) \ \ \frac{d}{dt}x_i(t) \ = \ c_i(x_i(t)), \ (i = 1, \ldots, \mathbb{I}) \\ \\ ii) \ \frac{d}{dt}y_i^k(t) \ = \ d_i^k(y_i^k(t)) \\ \qquad (i = 1, \ldots, \mathbb{I}, \ k = 1, \ldots, \mathbb{K}) \end{cases}$$

Exemples

Des exemples de telles dynamiques sont fournis par des gradients de fonctions d'utilité $c_i(x_i) := \nabla \mathbf{u}_i(x_i)$ ou de désutilité $d_i^k(y_i^k) := \nabla \mathbf{v}_i^k(y_i^k)$ qu'il s'agit de faire croître des consommations ou décroître des ressources le long de leurs évolutions.

Naturellement, il n'y aucune raison pour que les contraintes de rareté soient viables par rapport à ce système dynamique, ne serait-ce que parce que ces contraintes sont collectives alors que les dynamiques sont individuelles. Supposer que ces dynamiques dépendent des actions des autres agents modélise le caractère décentralisateur de la régulation par les prix.

Multiplicateurs de viabilité

La théorie des multiplicateurs de viabilité permet de corriger ces dynamiques individuelles en introduisant des multiplicateurs de viabilité

$$\begin{cases} i) & p(t) \in X \\ ii) & u_i(t) \in X \; (i = 1, \ldots, \mathbb{I}) \\ iii) & v_i(t) \in Y \; (i = 1, \ldots, \mathbb{I}) \end{cases}$$

Ces multiplicateurs de viabilité jouent un rôle analogue à celui des multiplicateurs de Lagrange ou de Kuhn-Tucker en optimisation sous contraintes, et en particulier, appartiennent aux mêmes espaces qu'eux. Ils bénéficient donc exactement du même statut d'interprétation économique, celui de prix virtuels dans les contextes qui se prêtent à de telles interprétations.

Correction des dynamiques

En supposant que les applications de production sont différentiables, le théorème sur les mutltiplicateurs de viabilité implique que les contraintes de rareté sont viables pour le système dynamique corrigé

$$\begin{cases} i) \quad \dfrac{d}{dt}x_i(t) = c_i(x_i(t)) - p(t) - u_i(t) \\ ii) \; \dfrac{d}{dt}y_i^k(t) = d_i^k(y_i^k(t)) \\ \qquad +v_i(t) + \dfrac{\partial g^k(y^k)^\star}{\partial y_i^k} p(t) \\ \qquad (i = 1, \ldots, \mathbb{I}, \; k = 1, \ldots, \mathbb{K}) \end{cases}$$

où $A^\star$ désigne le transposé d'un opérateur linéaire A, défini par :

$$\forall \, q \in Y, \; \forall \, x \in X, \;\; \langle A^* q, x \rangle \; := \; \langle q, Ax \rangle$$

Commentaires

Cela veut dire que, partant de chaque état initial satisfaisant les contraintes de rareté, l'on peut toujours trouver des multiplicateurs de viabilité $p(t) \in X$, $u_i(t) \in X$ et $v_i(t) \in Y$ tels que les évolutions produites satisfont ces contraintes de rareté à chaque instant.

Ces multiplicateurs de viabilité sont, comme dans le cas statique et marginaliste, interprêtés comme des prix virtuels :

Prix de marchés

1. les prix de marché $p(t)$, messages communs adressés à chaque agent économique, qui sont associés à la contrainte de marché

$$\sum_{i=1}^{\mathbb{I}} x_i(t) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\mathbb{K}} g^k(y^k(t)),$$

où les prix $\frac{\partial g^k(y^k)}{\partial y_i^k}^{\star} p(t)$ sont les prix des ressources associées au prix de marché $p(t)$ par les formules habituelles,

“Prix virtuels individualisés”

2. prix virtuels individualisés $u_i(t)$ et $v_i(t)$ associés aux contraintes de rareté

$$\sum_{\{k|S_k\ni i\}} y_i^k(t) \;\in\; L_i(x_i(t))$$

des ressources mises à la dispostion des firmes par chaque indidu i, le prix $v_i(t)$ pouvant être interprêtés commes un salaire virtuel et le prix $u_i(t)$ comme une frustration.

Applications multi-linéaires

Soit $S \subset \mathbb{I}$ une coalition d'agents économiques. Une application $g^S : Y^S \mapsto X$ associant à tout $(y_i)_{i \in S} \in Y^S$ un élément

$$g^S((y_i)_{i \in S}) \in X$$

est S-linéaire si pour tout $j \in S$, l'application

$$y_j \in Y \mapsto g^S((y_i)_{i \in S}) \in X$$

est linéaire. Cela exprime que les ressources mises à la disposition d'une coalition dépend de façon lineàire de chaque agent i, mais dont les coefficients de linéarité dépendent de façon sophistiquée (multiplicative) des contributions des autres agents aux ressources de la firme. Ce sont donc des extensions multi-linéaires des matirces de production "à la Von Neumann".

Exemples d'applications multi-linéaires

En particulier, dans le cas où $S = \emptyset$, on identifie les opérateurs $\emptyset$-linéaires $g^{\emptyset}$ avec les "constantes" $g^{\emptyset} \in X$.

Pour tout $i \in \mathbb{I}$, les opérateurs $\{i\}$-linéaires sont tout simplement les opérateurs linéaires $g^i : Y \mapsto X$, et pour tout couple (i, j), les opérateurs $\{i, j\}$-linéaires sont les opérateurs bilinéaires $g^{(i,j)} : Y \times Y \mapsto X$, et ainsi de suite.

Opérateurs multi-affines

Une application multi-affine $g^S : Y^S \mapsto X$ est une somme d'applications T-linéaires $g_T^S : Y^T \mapsto X$ lorsque les coalitions T sont contenues dans la coalition S:

$$g^S((y_i)_{i\in S}) := \sum_{T\subset S} g_T^S((y_i)_{i\in T})$$

Par exemple, si le processus de production $g^k := \sum_{T\subset S_k} g_T^{S_k} : Y^{S_k} \mapsto X$ est multi-affine, il agrège les biens produits par toutes les coalitions $T \subset S_k$ d'employés de la firme (naturellement, rien n'empêche de supposer que $g_T^{S_k} = 0$ si la coalition T ne mobilise en tant que telle aucune ressource de ses participants).

Cas particuliers

Le cas $g_{\emptyset}^{S_k} \in X$ représente les biens disponibles non produits par la firme k, le cas où tous les opérateurs $g_T^{S_k} = 0$ pour toutes les coalitions comportant plus d'un agent représente les processus de productions affines (linéaires plus constante).

On pose $Y^S := \prod_{i \in S} Y$. On désigne par $\mathcal{L}_S(Y^S, X)$ l'espace des applications S-linéaires $g^S : Y^S \mapsto X$ de l'espace Y^S des ressources mises à disposition par la coalition S dans l'espace des biens.

On identifie $\mathcal{L}_{\emptyset}(Y^S, X) =: X$ avec l'espace des biens X.

Dynamiques sans contraintes des opérateurs de production

Sans constraintes, l'évolution des opérateurs de production est gouvernée par une équation différentielle

$$\forall k = 1, \ldots, \mathbb{K},\ \forall T \subset S_k, \quad \frac{d}{dt} g_S^k(t) \ = \ e_S^k(g_S^k(t))$$

de sorte que l'évolution du système "endogènéisé" est régie par le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} i) & \dfrac{d}{dt} x_i(t) \ = \ c_i(x_i(t)) \\ ii) & \dfrac{d}{dt} y_i^k(t) \ = \ d_i^k(y_i^k(t)) \\ iii) & \dfrac{d}{dt} g_S^k(t) \ = \ e_S^k(g_S^k(t)) \\ & (i = 1, \ldots, \mathbb{I},\ k = 1, \ldots, \mathbb{K},\ T \subset S_k) \end{cases}$$

Produits tensoriels

On introduit maintenant une notation pour des opérateurs multilinéaires particuliers

$$(\bigotimes_{i\in S} y_i) \otimes p \in \mathcal{L}(Y^S, X)$$

associés à une suite $(y_i)_{i\in S}$ et à un mutltiplicateur $p \in X$ (appelés produits tensoriels des y_i ($i \in S$) et de p): ils associent à tout $(q_i)_{i\in S} \in Y^S$ l'élément

$$\left(\bigotimes_{i\in S} y_i \otimes p\right)((q_i)_{i\in S}) := \left(\prod_{i\in S} \langle q_i, y_i \rangle\right) p$$

Correction des dynamiques de production

$$\begin{cases} i) & \dfrac{d}{dt}x_i(t) = c_i(x_i(t)) - p(t) - u_i(t) \\ ii) & \dfrac{d}{dt}y_i^k(t) = d_i^k(y_i^k(t)) \\ & +v_i(t) + \displaystyle\sum_{\{T \mid i \in T \subset S_k\}} \dfrac{\partial g_T^k(y^k)}{\partial y_i^k}^{\star} p(t) \\ iii) & \dfrac{d}{dt}g_S^k(t) = e_S^k(g_S^k(t)) \\ & - \left(\displaystyle\bigotimes_{i \in S} y_i(t) \right) \otimes p(t) \\ & (i = 1, \dots, \mathbb{I},\ k = 1, \dots, \mathbb{K},\ T \subset S_k) \end{cases}$$

Cas où les ressources sont le travail

Un exemple de ressources $y_i \in Y_i := \mathbb{R}$ qui sont utilisées de façon multitplicative (multilinéaire) est le travail mis à la dispostion des processus de production par les agents économiques. En formant une coalition S d'agents économiques, certains processus de productions n'utilisant le travail que sous forme "coopérative" du produit $\prod_{i \in S} y_i$ des quantités de travail fournies par les agents de la coalition. Dans ce cas où la dimension de l'espace $Y_i := \mathbb{R}$ des ressources est égale à 1, les processus de production sont donc de la forme

$$g^S((y_i)_{i \in S}) \; := \; \sum_{T \subset S} \left(\prod_{i \in T} y_i \right) a_T^S$$

où $a_T^S \in X$.

L'offre et la demande

D'autre part, le travail est une ressource rare dont la quantité fournie dépend du niveau de la consommation x_i. Par exemple, il peut en dépendre linéairement, et on désigne par $\langle l_i, x_i \rangle$ la quantité maximum de travail fournie à chaque instant par l'agent i lorsqu'il consomme le bien x_i.

Les contraintes traduisant l'adéquation de l'offre à la demande s'écrivent

$$\begin{cases} i) \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathbb{I}} x_i(t) \ \leq \ \sum_{k=1}^{\mathbb{K}} \sum_{T \subset S_k} \left(\prod_{j \in T} y_j^k(t) \right) a_T^k(t) \\ ii) \ \forall i = 1, \ldots, \mathbb{I}, \quad \displaystyle\sum_{\{k | S_k \ni i\}} y_i^k(t) \ \leq \ \langle l_i, x_i(t) \rangle \end{cases}$$

Dynamiques intrinsèques

Partant de dynamiques intrinsèques décrivant le comportement des agents économiques sans contraintes

$$\left\{\begin{array}{lrcl} i) & \dfrac{d}{dt}x_i(t) & = & c_i(x_i(t)) \\ ii) & \dfrac{d}{dt}y_i^k(t) & = & d_i^k(y_i^k(t)) \\ iii) & \dfrac{d}{dt}a_S^k(t) & = & e_S^k(g_S^k(t)) \\ & (i = 1, \ldots, \mathbb{I},\ k = 1, \ldots, \mathbb{K},\ T \subset S_k) & & \end{array}\right.$$

les contraintes de rareté deviennent alors viables par rapport au système corrigé par les multiplicateurs de viabilité formés d'un prix de marché $p(t)$ et des $\mathbb{I}$ multiplicateurs $u_i \in \mathbb{R}$ associés aux contraintes sur la force de travail maximale des agents (bornée par $\langle l_i, x_i \rangle$) de la façon suivante:

Correction des dynamiques

$$
\begin{cases}
i) & \dfrac{d}{dt}x_i(t) = c_i(x_i(t)) - p(t) - u_i(t)l_i \\
ii) & \dfrac{d}{dt}y_i^k(t) = d_i^k(y_i^k(t)) + u_i(t) \\
& + \displaystyle\sum_{\{T|i\in T\subset S_k\}} \left(\prod_{j\in T\setminus i} y_j^k \right) \langle a_T^k(t), p(t) \rangle \\
iii) & \dfrac{d}{dt}a_S^k(t) = e_S^k(a_S^k(t)) \\
& - \left(\displaystyle\prod_{i\in S} y_i^k(t) \right) p(t) \\
& (i = 1, \ldots, \mathbb{I},\ k = 1, \ldots, \mathbb{K},\ T \subset S_k)
\end{cases}
$$

Commentaires

Deux remarques sont à l'ordre du jour:

1. la correction de l'évolution du travail y_i^k fournit par l'agent i à la firme k obéit à un "phénomène mimétique" au sens où apparaîssent devant le coût du facteur de production $\langle p(t), a_T^k(t) \rangle$ de chaque coalition $R \subset S_k$ le produit des quantités de travail des autres agents de la coalition T,
2. la correction de l'évolution des facteurs de production $a_S^k(t)$ de la sous-coaliton $S \subset S_k$ est proportionnelle au prix du marché $p(t)$ et au produit des quantités de $y_i^k(t)$ fournies par les agents $i \in S$ participant à la coalition S : c'est ce que l'on pourrait appeler une correction multi-hebbienne.

Régulation de l'évolution de l'économie

Ce que dit le théorème utilisé pour établir les assertions ci-dessus est que, partant d'une allocation de biens et de ressources entre les agents, on peut à chaque instant trouver des prix $p(t)$, $u_i(t)$ et $v_i(t)$ tels que les solutions $x_i(t)$, $y_i^k(t)$ et, dans le cas multi affine, des $g_S^k(t)$, gouvernées par les systèmes corrigés vérifient l'adéquation de l'offre à la demande.

La question se pose de savoir dans quel ensemble sont ces prix, et plus généralement de trouver la loi de régulation.

Correspondance de régulation

Elle est obtenue en calculant la "correspondance de régulation" associant à chaque suite $(x_i, y^k)_{i=1,\ldots,\mathbb{I},k=1,\ldots,\mathbb{K}}$ (ainsi que la suite des g_S^k dans le cas multi-affine) l'ensemble (non vide)

$$R((x_i, y^k, g_S^k)_{i=1,\ldots,\mathbb{I},\ k=1,\ldots,\mathbb{K},\ S\subset S_k})$$

des multiplicateurs de viabilité

$$(p, (u_i)_{i=1,\ldots,\mathbb{I}},\ (v_i)_{i=1,\ldots,\mathbb{I}})$$

tels que les contraintes de viabilité soient viables pour le système corrigé :

Correspondance de régulation

$$\left\{\begin{array}{lrcl} i) & \frac{d}{dt}x_i(t) & = & c_i(x_i(t)) - p(t) - u_i(t) \\ ii) & \frac{d}{dt}y_i^k(t) & = & d_i^k(y_i^k(t)) \\ & & & +v_i(t) + \frac{\partial g^k(y^k)}{\partial y_i^k}^{\star} p(t) \\ & & & (i = 1, \ldots, \mathbb{I},\ k = 1, \ldots, \mathbb{K}) \\ iv) & \multicolumn{3}{l}{\text{où } (p(t), (u_i(t))_{i=1,\ldots,\mathbb{I}}, (v_i(t))_{i=1,\ldots,\mathbb{I}})} \\ & \multicolumn{3}{l}{\in\ R((x_i(t), y^k(t))_{i=1,\ldots,\mathbb{I},\ k=1,\ldots,\mathbb{K}})} \end{array}\right.$$

Les feedbacks régulant les évolutions viables sont des "sélections" *univoques* $\widetilde{r}$ de la correspondance de régulation

$$\widetilde{r}((x_i, y^k, g_S^k)_{i=1,\ldots,\mathbb{I},k=1,\ldots,\mathbb{K},\ S\subset S_k})$$
$$\in R((x_i, y^k, g_S^k)_{i=1,\ldots,\mathbb{I},\ k=1,\ldots,\mathbb{K},\ S\subset S_k})$$

Évolutions lentes

Par exemple, les feedbacks associant à chaque suite $(x_i, y^k)_{i=1,\ldots,\mathbb{I},k=1,\ldots,\mathbb{K}}$ (ainsi que la suite des g_S^k dans le cas multi-affine) l'ensemble (non vide) $R((x_i, y^k, g_S^k)_{i=1,\ldots,\mathbb{I},\ k=1,\ldots,\mathbb{K},\ S\subset S_k})$ des multiplicateurs de viabilité

$$(p, (u_i)_{i=1,\ldots,\mathbb{I}},\ (v_i)_{i=1,\ldots,\mathbb{I}})$$

de norme minimum (ou tout autre procédé de sélection par optimisation) sont des candidats gouvernant ce qu'il est convenu d'appler des *"évolutions lentes"*.

Évolutions lourdes

De façon beaucoup plus pertinente dans le cadre économique (tout au moins à notre avis), il est préférable de sélectionner les

“évolutions lourdes”

associées à des multiplicateurs de viabilité (prix) évoluant de la façon la plus lente possible, avec une vitesse minimale. De telles évolutions lourdes respectent le

“principe d'inertie”

énonçant que les multiplicateurs de viabilité restent constants (ont une vitesse nulle) tant que la viabilité est satisfaite.

Processus d'ajustement

Pour les obtenir, il nous font donc "dériver" la correspondance de régulation, ce qui est désormais possible grâce au calcul différentiel des correspondances. Cette dérivée de la loi de régulation *fournit toutes les lois d'ajustement du type lois de l'offre et de la demande régissant l'évolution des prix $p(t)$, $u_i(t)$ et $v_i(t)$ tout en permettant à chaque instant les transactions* (ce que ne permet pas le tâtonnement walrassien). Les évolutions lourdes sont alors obtenues en prenant les vitesses des prix de norme minimum dans la dérivée de cette correspondance de régulation.

Conclusions ...

La notion "d'évolution lourde" revient à supposer que la main invisible d'Adam Smith est aussi paresseuse qu'opportuniste.